

ЛИНЕЙНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ КАКТУСОВ АВТОМОРФИЗМАМИ СВОБОДНОГО $\mathbb{Z}[t]$ -МОДУЛЯ

Ксения Вячеславовна Зимирева

Новосибирский государственный университет,
Новосибирск, Россия

k.zimireva@g.nsu.ru

Аннотация

В настоящей работе, основываясь на результатах Р.Ю и используя представление группы кактусов J_n в минимальной системе порождающих, в явном виде строится точное линейное представление группы J_n , зависящее от параметра t . Доказано, что данное линейное представление является приводимым. В случае $n = 3$ полученное приведенное представление приводимо для всех $t \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова и фразы

группа кактусов, группа Кокстера, группа подстановок, линейное представление, приводимость.

Источник финансирования

Исследование выполнено при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда № 24-21-00102, <https://rscf.ru/project/24-21-00102/>

Для цитирования

Зимирева К. В. Линейное представление группы кактусов автоморфизмами свободного $\mathbb{Z}[t]$ -модуля // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 67-78. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-67-78

Linear representation of the cactus groups by automorphisms of free $\mathbb{Z}[t]$ -module

Kseniya V. Zimireva

Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

k.zimireva@g.nsu.ru

Abstract

In the current work, a faithful linear representation of the cactus group J_n that depends on the parameter t was constructed in explicit form. This linear representation is based on result of R. Yu and presentation of the cactus group J_n in a minimal system of generators. It was proven that this linear representation is reducible. In the case $n = 3$, the resulting reduced representation is reducible for all $t \in \mathbb{R}$.

Keywords

cactus groups, Coxeter groups, symmetric groups, linear representation, reducibility.

Funding

This work has been supported by the grants the Russian Science Foundation, RSF 24-21-00102, <https://rscf.ru/project/24-21-00102/>

For citation

Zimireva K. V., Linear representation of the cactus groups by automorphisms of free $\mathbb{Z}[t]$ -module // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 67-78. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-67-78

§ 1. Введение и постановка задачи

Группа кактусов впервые возникла в работах С.Л. Девадосса [1] и М. Дэвисса, Т. Янушкевича, Р. Скотта [2] при изучении мозаичных операд и групп отражений, соответственно. В работе С.Л. Девадосса исследуется мозаичная операда, объекты которой определяются как многоугольники с отмеченными диагоналями, а композиция задается склеиванием сторон. Эта операда имеет структурное сходство с операдой групп кос. Действительно, понятие “группа квазикос” в работе С.Л. Девадосса мотивировано аналогией между тем, как группы кактусов получаются по мозаичным операдам, и тем, как группы кос получаются по малым кубическим операдам. Группа J_n (квазикос) определяется как группа автоморфизмов в некоторой моноидальной категории [1]. Группа кактусов получила свое название в 2006 г. в работе А. Энрикеса, Д. Камницера [3] при изучении структуры кограничных категорий.

В настоящей работе мы пользуемся определением группы кактусов из работы [4]. Группа кактусов J_n , $n \geq 2$, порождается элементами $s_{p,q}$, $1 \leq p < q \leq n$ и определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} s_{p,q}^2 &= 1, \\ s_{p,q}s_{m,r} &= s_{m,r}s_{p,q}, \quad \text{если } [p, q] \cap [m, r] = \emptyset, \\ s_{p,q}s_{m,r} &= s_{p+q-r, p+q-m}s_{p,q}, \quad \text{если } [m, r] \subset [p, q]. \end{aligned}$$

Здесь, $[p, q] = \{p, p+1, \dots, q-1, q\}$.

Аналогично косам, элементы группы кактусов могут быть представлены кривыми на плоскости. Примеры геометрической интерпретации таких элементов для J_4 приведены на рисунке. На основе этой геометрической интерпретации естественным образом определяется гомоморфизм группы кактусов J_n на группу подстановок S_n . Каждому элементу $s_{p,q}$ сопоставляется подстановка из S_n , которая меняет порядок элементов $p, p+1, \dots, q$ на обратный, оставляя остальные элементы на своих местах. Ядро данного гомоморфизма называется группой крашенных кактусов и обозначается PJ_n [6].

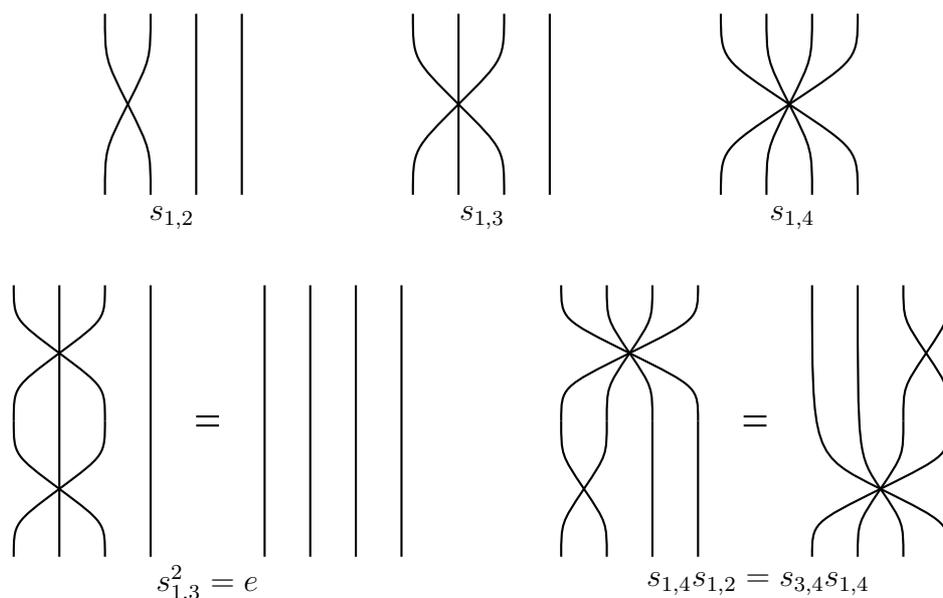


Рис. 1. Интерпретация некоторых элементов и соотношений группы J_4

В настоящее время явное представление группы PJ_n известно лишь при $n \leq 4$. В работе [4] представление PJ_4 строится при помощи метода Рейдемейстера—Шрайера. Другое представление группы PJ_4 было получено в работе [5] при рассмотрении действия группы на гиперболической плоскости и построении многоугольника Дирихле для этого действия. Я. Мостовой [6] показал, что группа крашенных кактусов вкладывается в прямоугольную группу Кокстера. Р.Ю в своей работе [7] определил обобщенную группу кактусов и показал, что обобщенная группа крашенных кактусов также вкладывается в прямоугольную группу Кокстера.

Группы кактусов исследовались в контексте геометрической теории групп в работе [8]. В работе [4] П. Беллинджери, Х. Чемин и В. Лебедь решили проблему равенства слов, описали кручение и нашли центр группы кактусов. Также ими было получено представление групп кактусов J_n , $n \leq 4$, в порождающих, число которых нельзя уменьшить. Кроме того, они изучали связь группы кактусов с прямоугольными группами Кокстера, группами твинов и группами диаграмм Гаусса—Мостового.

Известно, что группа кактусов J_n может быть порождена $n - 1$ элементами, причем это число нельзя уменьшить [10]. Полная система соотношений в этих порождающих описана в работах [9] и [10] и результаты совпадают с точностью до обозначений. В настоящей работе мы пользуемся этим описанием группы кактусов J_n в минимальной системе порождающих для построения линейного представления J_n .

В работе Р.Ю [7] было построено линейное представление обобщенной группы кактусов, зависящее от параметра $t \in \mathbb{R}$, которое является точным при $t = 1$. Общая конструкция построенного линейного представления не дает явного линейного представления группы кактусов J_n . Учитывая, что группа кактусов является частным случаем обобщенной группы кактусов, мы строим точное линейное представление J_n в явном виде, основываясь на результате Р.Ю.

Во втором параграфе настоящей работы мы приводим основные определения и утверждения, необходимые для построения линейного представления группы кактусов в явном виде. В третьем параграфе строится точное линейное представление группы J_n в группу автоморфизмов свободного модуля над кольцом многочленов $\mathbb{Z}[t]$. Доказано, что данное линейное представление является приводимым. В случае

$n = 3$ полученное приведенное представление приводимо для всех $t \in \mathbb{R}$.

§ 2. Предварительные сведения

Сформулируем определения и утверждения, необходимые для доказательства основной теоремы. Также отметим, что в настоящей работе умножение подстановок выполняется справа–налево.

Определение 2.1 ([11], §1). *Группа Кокстера W порождается элементами s_1, \dots, s_n и определяется соотношениями $(s_i s_j)^{m_{ij}} = 1$, где m_{ij} – порядок элемента $s_i s_j$. Здесь $m_{ij} = 1$, если $i = j$ и $m_{ij} \in \{2, 3, \dots\} \cup \infty$ при $i \neq j$. При этом $m_{ij} = \infty$, если группа, порожденная $s_i s_j$ – бесконечная циклическая группа.*

По группе Кокстера W определяется матрица Кокстера $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$ – симметрическая квадратная матрица, элементы которой являются целые числа или же символ ∞ .

Пусть W – группа Кокстера с порождающим множеством S , тогда пара (W, S) называется системой Кокстера. Если I – непустое подмножество в S , то подгруппа, порожденная I , называется параболической подгруппой группы W и обозначается W_I . Множество I называется связным, если $|W_I| < \infty$ и не существует непустых множеств $J, K \subseteq S$, $J \cap K = \emptyset$, таких, что $I = J \cup K$ и $W_I = W_J \times W_K$. Множество всех связных множеств обозначим $\mathcal{F}(S)$.

Определение 2.2 ([7]). *Обобщенная группа кактусов GJ_W , соответствующая системе Кокстера (W, S) , порождается элементами $\{\gamma_I \mid I \in \mathcal{F}(S)\}$ и определяется соотношениями:*

$$\begin{aligned} \gamma_I^2 &= 1, \\ \gamma_I \gamma_J &= \gamma_J \gamma_{w_J(I)}, \text{ если } I \subset J \text{ или } W_{I \cup J} = W_I \times W_J, \end{aligned}$$

где w_J – самый длинный элемент подгруппы W_J и $w_J(I) = w_J I w_J^{-1}$.

Напомним, что длиной элемента $w \in W$ называется наименьшее целое число $q \geq 0$, такое, что w есть произведение q элементов из S . Самый длинный элемент w_J подгруппы W_J – это элемент, имеющий максимальную длину [11].

Отметим, что группа подстановок S_n является группой Кокстера типа A_{n-1} . В этом случае S_n порождается множеством транспозиций $S = \{s_i = (i, i+1), 1 \leq i \leq n-1\}$.

Следующая лемма легко проверяется непосредственно:

Лемма 2.1. *Любая транспозиция $(a, b) \in S_n$, где $a < b$ раскладывается в произведение транспозиций вида $(i, i+1)$, $a \leq i \leq b-1$:*

$$(a, b) = (a, a+1)(a+1, a+2) \dots (b-1, b)(b-2, b-1) \dots (a+1, a+2)(a, a+1).$$

В работе [7] было доказано, что в случае, когда W – группа подстановок S_n с порождающими $s_i = (i, i+1)$, $1 \leq i \leq n-1$, обобщенная группа кактусов GJ_W совпадает с группой кактусов, определенной в 2.3.

Как было замечено в [9] и [10] группа J_n обладает следующим представлением:

Определение 2.3 ([10], [9]). *Группа кактусов* J_n , $n \geq 2$, порождается элементами $a_i = s_{1,i}$, $i = 2, \dots, n$, и определяется соотношениями:

$$\begin{aligned} a_i^2 &= 1, \quad 2 \leq i \leq n, \\ (a_i a_k a_j a_k)^2 &= 1, \quad 2 \leq i \leq j, \quad i + j \leq k, \\ a_i a_k a_j a_k &= a_{i+j-k} a_j a_{i+j-k} a_i, \\ 4 \leq j + 2 \leq i \leq n, \quad j < k < i, \\ 2 \leq i + j - k \leq n, \quad 2k \leq i + j. \end{aligned}$$

Р.Ю определил линейное представление обобщенной группы кактусов. Напомним его конструкцию. Используя множества всех связных подмножеств $\mathcal{F}(S)$ системы Кокстера (W, S) можно определить систему Кокстера (\mathbb{W}, \mathbb{S}) с множеством порождающих

$$\mathbb{S} = \{wW_Iw^{-1} \mid I \in \mathcal{F}(S), w \in W\}, \tag{1}$$

и матрицей Кокстера $\mathbb{M} = (m(W_1, W_2))_{W_1, W_2 \in \mathbb{S}}$, элементы которой определяются следующей формулой:

$$m(W_1, W_2) = \begin{cases} 1, & \text{если } W_1 = W_2, \\ 2, & \text{если } W_1 \subset W_2 \text{ или } W_2 \subset W_1, \\ 2, & \text{если } W_1 \cap W_2 = \{e\} \text{ и } W_2 \subset C_W(W_1), \\ \infty, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{2}$$

где $C_W(W_1)$ – централизатор группы W_I .

Для любого $w \in W$ определен автоморфизм $g_w \in \text{Aut}(\mathbb{W}, \mathbb{S})$, который действует на порождающих \mathbb{W} по правилу $g_w : W_I \mapsto wW_Iw^{-1}$, где $W_I \in \mathbb{S}$.

Р.Ю [7] построил вложение $GJ_W \hookrightarrow \mathbb{W} \rtimes \text{Aut}(\mathbb{W}, \mathbb{S})$, переводящее порождающие γ_I группы GJ_W в элемент $W_I \cdot g_{w_I}$ из $\mathbb{W} \rtimes \text{Aut}(\mathbb{W}, \mathbb{S})$. Используя это вложение и точное линейное представление $\Pi : \mathbb{W} \rtimes \text{Aut}(\mathbb{W}, \mathbb{S}) \rightarrow GL(E)$, где E – векторное пространство над \mathbb{R} размерности $|\mathbb{S}|$, Р.Ю построил точное линейное представление группы GJ_W .

§ 3. Основные результаты

В настоящем параграфе мы рассматриваем группу Кокстера типа A_{n-1} , которая изоморфна группе подстановок S_n с множеством порождающих $\{(1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n)\}$. Из описанного в предложении 2.2 работы [7] соответствия между связными множествами $\mathcal{F}(S_n)$ и порождающими группы J_n , а также с учетом определения 2.3, достаточно рассматривать связные множества вида $I = \{(1, 2), \dots, (i-1, i)\}$. В этом случае параболические подгруппы, соответствующие указанным связным множествам, имеют вид:

$$W_2 = \langle(1, 2)\rangle, W_3 = \langle(1, 2), (2, 3)\rangle, \dots, W_n = S_n = \langle(1, 2), \dots, (n-1, n)\rangle.$$

Мы пользуемся обозначением $W_i := W_I = \langle I \rangle$, где $I = \{(1, 2), \dots, (i-1, i)\} \in \mathcal{F}(S_n)$.

Следующая лемма дает явное описание множества \mathbb{S} .

Лемма 3.2. *Множество \mathbb{S} для группы Кокстера S_n состоит из подгрупп:*

$$\langle(i_1, i_2)\rangle, \langle(i_1, i_2), (i_2, i_3)\rangle, \dots, \langle(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})\rangle, \tag{3}$$

где $k < n$, (i_l, i_{l+1}) – транспозиция из S_n , и $i_l < i_{l+1}$ для всех $1 \leq l \leq k$.

Доказательство. В случае группы подстановок S_n множество всех связных множеств записывается в виде (см. [7], предложение 2.2)

$$\mathcal{F}(S) = \{(i, i+1), (i+1, i+2), \dots, (j, j+1)\} \mid 1 \leq i \leq j \leq n-1\}.$$

Произвольный элемент $w \in S_n$ может быть представлен следующим образом:

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

где $i_j \in \{1, \dots, n\}$ и $i_s \neq i_t$ при $s \neq t$, $1 \leq s, t \leq n$.

Пусть $I \in \mathcal{F}(S)$ с числом элементов $k < n$. После сопряжения элементом w , получаем

$$W_I^w = \langle (i_j, i_{j+1}), (i_{j+1}, i_{j+2}), \dots, (i_k, i_{k+1}) \rangle, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Покажем, что от порождающих W_I^w можно перейти к порождающим, упорядоченным в соответствии с формулой (3). Для доказательства используем индукцию по количеству упорядоченных элементов i_j , из которых состоят порождающие W_I^w . База индукции: $m = 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда $i_2 < i_1$. От порождающих $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})$ при помощи сопряжения элементом (i_2, i_1) мы переходим к упорядоченным порождающим $(i_2, i_1), (i_1, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})$. База индукции установлена.

Предположим далее, что m элементов упорядочено и i_{m+1} равен первому элементу в $(m+1)$ -й паре, т. е. $(i_1, i_2), \dots, (i_m, i_{m+1}), (i_{m+1}, i_{m+2}), \dots$, где $i_{j-1} < i_j$, $2 \leq j \leq m$. Получим порядок в m -ой паре в соответствии с формулой (3). Достаточно рассмотреть 2 случая.

Случай 1: $i_{m+1} < i_1$. Сопрягая каждый порождающий элемент циклом $(i_{m+1}i_m \dots i_1)$, мы получаем необходимый порядок, т. е. $(i_{m+1}, i_1), \dots, (i_{m-1}, i_m), (i_m, i_{m+2}), \dots$.

Случай 2: $i_j < i_{m+1} < i_{j+1}$. По аналогии, после сопряжения каждого порождающего циклом $(i_{m+1}i_m \dots i_{j+2}i_{j+1})$ мы получаем $(i_1, i_2), \dots, (i_j, i_{m+1}), (i_{m+1}, i_{j+1}), \dots$, где $1 \leq j \leq m-1$.

Заметим, что все циклы на каждом шаге индукции можно получить как произведение рассматриваемых порождающих. Например, $(i_{m+1}i_m \dots i_1) = (i_2, i_1) \dots (i_{m+1}, i_m) = (i_1, i_2) \dots (i_m, i_{m+1})$. Аналогичным образом расписывается цикл $(i_{m+1}i_m \dots i_{j+2}i_{j+1})$.

В случае, если последний элемент не упорядочен в соответствии с формулой (3), для него справедливы те же 2 случая, что рассматривались при доказательстве индукционного перехода. \square

Пример 3.1. а) Пусть $n = 3$, тогда $\mathcal{F}(S) = \{(1, 2)\}, \{(2, 3)\}, \{(1, 2), (2, 3)\}$. Сопрягая подгруппы W_I , $I \in \mathcal{F}(S)$, каждым элементом группы S_3 в соответствии с формулой (1), получаем следующий вид множества \mathbb{S} :

$$\mathbb{S} = \{\langle (1, 2) \rangle, \langle (1, 3) \rangle, \langle (2, 3) \rangle, \langle (1, 2), (2, 3) \rangle\} = \{\langle s_1 \rangle, \langle s_2^{s_1} \rangle, \langle s_2 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle\}.$$

б) Аналогичным образом получаем \mathbb{S} при $n = 4$:

$$\mathbb{S} = \{\langle s_1 \rangle, \langle s_2^{s_1} \rangle, \langle s_3^{s_2 s_1} \rangle, \langle s_2 \rangle, \langle s_3^{s_2} \rangle, \langle s_3 \rangle, \langle s_1, s_2 \rangle, \langle s_1, s_3^{s_2} \rangle, \langle s_2^{s_1}, s_3 \rangle, \langle s_2, s_3 \rangle, \langle s_1, s_2, s_3 \rangle\}.$$

Пусть $1 \leq k \leq n-1$ и группа K порождается элементами $(i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1})$, $i_j < i_{j+1}$, $1 \leq j \leq k$. Определим на множестве \mathbb{S} отображение $f_i : \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}$, $2 \leq i \leq n$, действующее на K по правилу:

$$f_i(K) = \langle (j_1, j_2), \dots, (j_k, j_{k+1}) \rangle,$$

где $l = \max\{s \in \{1, \dots, k+1\} \mid i_s \leq i\}$, при $i_1 \leq i$, иначе полагаем $l = 0$ и

$$j_s = \begin{cases} i - i_{l-s+1} + 1, & 1 \leq s \leq l, \\ i_s, & l < s \leq k+1. \end{cases} \quad (4)$$

Общая конструкция линейного представления Р.Ю для группы J_n дает следующий результат:

Теорема 3.1. *Существует линейное представление $\Pi : J_n \rightarrow \text{Aut}(V)$ группы J_n автоморфизмами свободного $\mathbb{Z}[t]$ – модуля V с базисом e_K , $K \in \mathbb{S}$, при котором образами порождающих a_i являются автоморфизмы ϕ_i , определенные по формуле*

$$\phi_i(e_K) = \begin{cases} -e_K, & K = W_i, \\ e_K, & i < i_1, \\ e_{f_i(K)} + 2te_{W_i}, & W_i \not\subset f_i(K) \text{ и } i_1 \leq i < i_{k+1}, \\ e_{f_i(K)}, & W_i \subset f_i(K) \text{ или } i_{k+1} \leq i, \end{cases} \quad (5)$$

где $K = \langle (i_1, i_2), (i_2, i_3) \dots, (i_k, i_{k+1}) \mid i_j < i_{j+1}, 1 \leq j \leq k \rangle$, $1 \leq k \leq n-1$.

Доказательство. Напомним, что отображение $\Pi : \mathbb{W} \rtimes \text{Aut}(\mathbb{W}, \mathbb{S}) \rightarrow GL(\mathbb{R}^{|\mathbb{S}|})$, является линейным представлением $\mathbb{W} \rtimes \text{Aut}(\mathbb{W}, \mathbb{S})$ [7], действующим по правилу

$$\Pi(W_i g_{w_i})(e_K) = e_{g_{w_i}(K)} - 2B_t(e_{g_{w_i}(K)}, e_{W_i})e_{W_i}, \quad K \in \mathbb{S}, \quad (6)$$

где билинейная форма B_t определена следующим образом:

$$B_t(e_{g_{w_i}(K)}, e_{W_i}) = \begin{cases} -\cos(\pi/m(g_{w_i}(K), W_i)), & m(g_{w_i}(K), W_i) < \infty, \\ -t, & m(g_{w_i}(K), W_i) = \infty. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь w_i – самый длинный элемент подгруппы W_i , который может быть записан в виде:

$$w_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & i+1 & \dots & n \\ i & i-1 & \dots & 1 & i+1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

При $K = W_i$ в силу равенства $g_{w_i}(W_i) = W_i$, по (2) и (7) имеем

$$\Pi(W_i g_{w_i})(e_{W_i}) = e_{g_{w_i}(W_i)} - 2B_t(e_{g_{w_i}(W_i)}, e_{W_i})e_{W_i} = -e_{W_i}.$$

Пусть $K = \langle (i_1, i_2), (i_2, i_3), \dots, (i_k, i_{k+1}) \rangle$. При $K \neq W_i$ найдем значение $g_{w_i}(K) = w_i K w_i^{-1}$. Поскольку w_i переставляет первые i элементов, а все i_j в K упорядочены, то в зависимости от значения i мы получаем два случая. В первом случае $i < i_1$, а во втором $i \geq i_1$. При $i \geq i_1$ существует такое максимальное $1 \leq l \leq k+1$, что $i_l \leq i$. В соответствии с этим разбиением проведем разбор случаев, в каждом из которых установим значение выражения $B_t(e_{g_{w_i}(K)}, e_{W_i})$ из формулы (7).

Случай 1: $i < i_1$. Тогда $W_i \cap f_i(K) = \{e\}$ и все элементы из W_i коммутируют со всеми элементами из K . Значит, $w_i K w_i^{-1} = K$ и $m(g_{w_i}(K), W_i) = m(K, W_i) = 2$ по формуле (2). Следовательно

$$\Pi(W_i g_{w_i})(e_K) = e_K - 2B_t(e_K, e_{W_i})e_{W_i} = e_K.$$

Случай 2: $1 \leq i_1 \leq i_l \leq i < i_{k+1}$, тогда подгруппа, сопряженная с K , имеет вид

$$w_i K w_i^{-1} = \langle (i - i_1 + 1, i - i_2 + 1), \dots, (i - i_l + 1, i_{l+1}), \dots, (i_k, i_{k+1}) \rangle.$$

Порождающие элементы в данном случае не упорядочены в соответствии с формулой (3), поскольку $i - i_j + 1 > i - i_{j+1} + 1$ для всех $1 \leq j \leq l$. Также отметим, что $i_l \leq i < i_{l+1}$ и $i - i_j + 1 < i_{l+1}$ для всех $1 \leq j \leq l$. Приведем выражение $w_i K w_i^{-1}$ к виду (3) при помощи сопряжения всех порождающих элементов σ , где

$$\sigma = (i - i_1 + 1, i - i_l + 1)(i - i_2 + 1, i - i_{l-1} + 1) \dots (i - i_{l/2} + 1, i - i_{l/2+1} + 1),$$

когда l чётно и

$$\sigma = (i - i_1 + 1, i - i_l + 1)(i - i_2 + 1, i - i_{l-1} + 1) \dots (i - i_{(l+1)/2-1} + 1, i - i_{(l+1)/2+1} + 1),$$

когда l нечётно. Несложно видеть, что $\sigma \in w_i K w_i^{-1}$ и после сопряжения мы получим ту же самую группу. Откуда находим, что $g_{w_i}(K) = f_i(K)$. Значение $B_t(e_{f_i(K)}, e_{W_i})$ в формуле (7) зависит от порядка элементов j_1, j_{k+1} и i в силу (2), где j_s определены по формуле (4). Отметим, что случай $j_1 > i$ не реализуется, так как иначе $i - i_l + 1 > i$ и $i_l < 1$, противоречие. Также при $l < k + 1$ имеем $f_i(K) \not\subset W_i$.

Случай 2.1: $l = 1$. Имеем $1 \leq i_1 \leq i < i_2$, $(j_1, j_2) = (i - i_1 + 1, i_2)$ и $j_s = i_s$, $2 \leq s \leq k + 1$. В данном случае $W_i \cap f_i(K) = \{e\}$, поскольку $1 \leq j_1 \leq i < j_2 = i_2$ и ни один элемент из $f_i(K)$ не лежит в W_i . При этом $W_i \not\subset C_W(f_i(K))$, так как $(1, 2)(1, j_2) \neq (1, j_2)(1, 2)$, где $(1, 2) \neq (1, j_2) \in f_i(K)$. Теперь рассмотрим $j_1 > 1$. Аналогично приходим к выводу, что $W_i \not\subset C_W(f_i(K))$, поскольку $(j_1 - 1, j_1)(j_1, j_2) \neq (j_1, j_2)(j_1 - 1, j_1)$, где $(j_1, j_2) \in f_i(K)$. Таким образом, при любом значении $j_1 \geq 1$ получаем $m(g_{w_i}(K), W_i) = m(f_i(K), W_i) = \infty$ в силу (2). Тогда (6) принимает вид

$$\Pi(W_i g_{w_i})(e_K) = e_{f_i(K)} + 2te_{W_i}.$$

Случай 2.2: $1 < l < k + 1$. Тогда $1 \leq i_1 < i_l \leq i < i_{k+1}$. Если $j_{s+1} = j_s + 1$ для всех $1 \leq s \leq l - 1 = i - 1$, то $W_i \subset f_i(K)$. Из (2) следует, что $m(f_i(K), W_i) = 2$ и

$$\Pi(W_i g_{w_i})(e_K) = e_{f_i(K)} - 2B_t(e_{f_i(K)}, e_{W_i})e_{W_i} = e_{f_i(K)}.$$

В противном случае, найдется такой элемент (j_s, j_{s+1}) , что $j_{s+1} \neq j_s + 1$. Тогда $W_i \not\subset f_i(K)$, поскольку $(j_s, j_s + 1) \in W_i \setminus f_i(K)$. Если $W_i \cap f_i(K) \neq \{e\}$, то $m(f_i(K), W_i) = \infty$ по (2). Рассмотрим $W_i \cap f_i(K) = \{e\}$ и покажем, что $W_i \not\subset C_W(f_i(K))$. В таком случае $(j_s, j_s + 1) \in W_i$ не коммутирует с $(j_s, j_{s+1}) \in f_i(K)$. Следовательно, в формуле (6) имеем $\Pi(W_i g_{w_i})(e_K) = e_{f_i(K)} + 2te_{W_i}$.

Случай 3: $l = k + 1$. Тогда $1 \leq i_1 < i_{k+1} \leq i$ и в силу формулы (4) имеем $1 \leq j_1 < j_{k+1} \leq i$. Следовательно, $g_{w_i}(K) = f_i(K) \subset W_i$, поэтому в (2) имеем $m(f_i(K), W_i) = 2$ и $\Pi(W_i g_{w_i})(e_K) = e_{f_i(K)}$. \square

Предложение 3.1 ([7]). *Линейное представление Π из теоремы 3.1 является точным при $t = 1$.*

Используя теорему 3.1 построим линейное представление групп J_3 и J_4 .

Пример 3.2. Пусть $n = 3$, тогда для \mathbb{S} из примера 3.1a матрицы автоморфизмов ϕ_2 и ϕ_3 имеют следующий вид:

$$[\phi_2] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 1 & 0 \\ 2t & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\phi_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3.3. При $n = 4$ множество \mathbb{S} определено в 3.16. Тогда матрицы автоморфизмов ϕ_2 , ϕ_3 и ϕ_4 имеют следующий вид:

$$[\phi_2] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[\phi_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2t & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$[\phi_4] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Из приведенных примеров видно, что построенное линейное представление приводимо. В общем случае справедливо следующее предложение.

Предложение 3.2. Представление Π является приводимым. Пусть $\Pi_i(J_n) = \Pi(J_n)|_{V_i}$, $i = 1, 2$, тогда $\Pi(J_n) = \Pi_1(J_n) \oplus \Pi_2(J_n)$, где V_1 — подмодуль V , порожденный векторами e_K , $K \in \mathbb{S} \setminus \{W_n\}$, и V_2 — подмодуль V , порожденный вектором e_{W_n} .

Доказательство. Заметим, что модуль V является прямой суммой $V = V_1 \oplus V_2$. Покажем, что каждый из подмодулей V_1 и V_2 инвариантен относительно действия $\Pi(J_n)$.

Из теоремы 3.1 следует, что

$$\phi_i(e_{W_n}) = \begin{cases} -e_{W_n}, & \text{если } i = n, \\ e_{W_n}, & \text{если } 1 < i < n. \end{cases}$$

Таким образом, V_2 инвариантен относительно действия $\Pi(J_n)$.

Покажем, что $\phi_i(V_1) \subseteq V_1$. Отметим, что если $K \neq W_n$, то и $f_i(K) \neq W_n$. Действительно, ввиду формулы (3), если $K \neq W_n$, то число различных элементов i_s , $1 \leq s \leq k+1$, меньше n . Под действием f_i на K мы также получим подгруппу из \mathbb{S} , в порождающих которой то же самое число различных элементов j_s .

В формуле (5) для любого $2 \leq i \leq n$ встречаются выражения e_K и $e_{f_i(K)}$. Из условия $K \neq W_n$ следует, что $e_K \in V_1$ и $e_{f_i(K)} \in V_1$, поскольку $f_i(K) \neq W_n$. Таким образом, мы не можем получить элемент e_{W_n} , который порождает V_2 . Значит, V_1 , действительно, является инвариантным подмодулем относительно действия $\Pi(J_n)$. \square

Обозначим полученное в предложении представление как $\tilde{\Pi} = \Pi_1$. Автоморфизмы $\tilde{\Pi}(a_i)$, действующие по формуле (5) на базисе модуля V_1 , будем также обозначать как ϕ_i .

Предложение 3.3. *Линейное представление $\tilde{\Pi}$ приводимо для всех $t \in \mathbb{R}$ при $n = 3$.*

Доказательство. Для базиса модуля V_1 введем обозначения: $e_1 = e_{\langle s_1 \rangle}$, $e_2 = e_{\langle s_1 s_2 s_1 \rangle}$ и $e_3 = e_{\langle s_2 \rangle}$ (см. (3.1)). Рассмотрим матрицы автоморфизмов $[\phi_2]$ и $[\phi_3]$ в базисе модуля V_1 :

$$[\phi_2] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2t & 0 & 1 \\ 2t & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\phi_3] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Собственными векторами матриц являются $v_1 = (-1/(2t)x - 1/(2t)y, x, y)^T$ и $v_2 = (0, y, y)^T$ для $[\phi_2]$, $w_1 = (y, x, y)^T$ и $w_2 = (-y, 0, y)^T$ для $[\phi_3]$, где $x, y \in \mathbb{Z}[t]$. Вектор $u_1 = (0, 1, 1)^T$ является собственным для $[\phi_2]$ и $u_2 = (1, 0, -1)^T$ для $[\phi_3]$. Этим векторам соответствуют элементы $e_2 + e_3$ и $e_1 - e_3$. В качестве подмодуля U возьмем линейную оболочку элементов, соответствующих векторам u_1 и u_2 .

Покажем, что подмодуль U инвариантен относительно действия $\tilde{\Pi}(J_n)$. Действительно,

$$\begin{aligned} [\phi_2](\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) &= \alpha_1 [\phi_2]u_1 + \alpha_2 [\phi_2]u_2 = (0, \alpha_1, \alpha_1)^T + (-\alpha_2, (2t-1)\alpha_2, 2t\alpha_2)^T \\ &= (\alpha_1 + (2t-1)\alpha_2)u_1 - \alpha_2 u_2, \end{aligned}$$

$$[\phi_3](\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = (\alpha_1, \alpha_1, 0)^T + (-\alpha_2, 0, \alpha_2)^T = \alpha_1 u_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)u_2,$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}[t]$. Из полученных формул следует, что $[\phi_2](u_1) = u_1$, $[\phi_2](u_2) = (2t-1)u_1 - u_2$, и $[\phi_3](u_1) = u_1 + u_2$, $[\phi_3](u_2) = -u_2$. Таким образом, можно перейти к представлению $\hat{\Pi}(J_n) = \tilde{\Pi}(J_n)|_U$, заданном на подмодуле U , где матрицы автоморфизмов выражаются следующим образом:

$$[\phi_2|_U]' = \begin{pmatrix} 1 & 2t-1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad [\phi_3|_U]' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

\square

Благодарности: Автор выражает благодарность своему научному руководителю Валерию Георгиевичу Бардакову за ценные рекомендации и Алексею Александровичу Коробову за полезные замечания.

Список литературы

1. Devadoss S. L. Tessellations of Moduli Spaces and the Mosaic Operad // *Contemp. Math.* 1999.N 239.P. 91–114.
2. Davis M., Januszkiewicz T., Scott R. Fundamental groups of blow-ups // *Adv. Math.* 2003.N 177(1).P. 115–179.
3. Henriques A., Kamnitzer J. Crystals and coboundary categories // *Duke Math.J.* 2006.N 2.P. 191–216.
4. Bellingeri P., Chemin H., Lebed V. Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups // *J. Algebr. Comb.* 2024.N 59.P. 153–178.
5. Hama T., Ichihara K. A presentation of the pure cactus group of degree four, 2025. 10.48550/arXiv.2504.11852.
6. Mostovoy J. The pure cactus group is residually nilpotent // *Arch. Math.* 2019.N 113.P. 229–235.
7. Yu R. Linearity of generalized cactus groups // *J. Algebra* 2023.N 635.P. 256–270.
8. Genevois A. Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory // *Topology Proceedings* 2025.V. 66.P. 59–103.
9. Zimireva K. V. A presentation of the cactus group // *Collection of Abstracts /Mal'tsev meeting, November 13–17, 2023.P. 182.*
10. Chemin H., Nanda N. Minimal presentation, finite quotients and lower central series of cactus groups // *Bulletin des Sciences Mathematiques* 2025.V. 204.P. 103669.
11. Бурбаки Н. *Элементы математики. Группы и алгебры Ли.* Главы IV–VI. М.: Мир, 1972.

References

1. Devadoss S. L. Tessellations of Moduli Spaces and the Mosaic Operad // *Contemp. Math.* 1999.N 239.P. 91–114.
2. Davis M., Januszkiewicz T., Scott R. Fundamental groups of blow-ups // *Adv. Math.* 2003.N 177(1).P. 115–179.
3. Henriques A., Kamnitzer J. Crystals and coboundary categories // *Duke Math.J.* 2006.N 2.P. 191–216.
4. Bellingeri P., Chemin H., Lebed V. Cactus groups, twin groups, and right-angled Artin groups // *J. Algebr. Comb.* 2024.N 59.P. 153–178.
5. Hama T., Ichihara K. A presentation of the pure cactus group of degree four, 2025. 10.48550/arXiv.2504.11852.

6. Mostovoy J. The pure cactus group is residually nilpotent // *Arch. Math.* 2019.N 113.P. 229–235.
7. Yu R. Linearity of generalized cactus groups // *J. Algebra* 2023.N 635.P. 256–270.
8. Genevois A. Cactus groups from the viewpoint of geometric group theory // *Topology Proceedings* 2025.V. 66.P. 59–103.
9. Zimireva K. V. A presentation of the cactus group // *Collection of Abstracts /Mal'tsev meeting, November 13–17, 2023.P. 182.*
10. Chemin H., Nanda N. Minimal presentation, finite quotients and lower central series of cactus groups // *Bulletin des Sciences Mathematiques* 2025.V. 204.P. 103669.
11. Bourbaki N. *Elements of Mathematics. Lie groups and Lie algebras.* Chapters IV–VI. Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1975.

Информация об авторе

Ксения Вячеславовна Зимирева аспирант

Scopus Author ID 59095425500

Author Information

Kseniya V. Zimireva, Postgraduate Student

Scopus Author ID 59095425500

*Статья поступила в редакцию 14.11.2025;
одобрена после рецензирования 18.01.2026; принята к публикации 21.01.2026*

*The article was submitted 14.11.2025;
approved after reviewing 18.01.2026; accepted for publication 21.01.2026*